Модели авторегрессии – скользящего среднего ARMA(p,q). Условие стационарности модели авторегрессии – скользящего среднего ARMA(p,q).

Процесс X_t с нулевым математическим ожиданием(МО), принадлежащий такому классу процессов, характеризуется порядками p и q его AR и MA составляющих и обозначается как процесс $ARMA(p,q)$.

Процесс X_t с нулевым МО принадлежит классу $ARMA(p,q)$, если

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j} =$$
$$= a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + ... + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_q \varepsilon_{t-q},$$
$$a_p \neq 0, \quad b_q \neq 0, \quad \varepsilon_t \text{ - белый шум}, \quad (\mathbb{E}X_t = 0).$$

В операторной форме $a(L)X_t = b(L)\varepsilon_t$, $a(L), b(L)$ – как для $AR(p), MA(q)$. Если процесс X_t имеет постоянное МО μ, то он является процессом типа $ARMA(p,q)$ в широком смысле, если

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^{p} a_j (X_{t-j} - \mu) + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j},$$
$$a_p \neq 0, \quad b_q \neq 0, \quad \varepsilon_t \text{ - белый шум}, \quad (\mathbb{E}X_t = \mu \neq 0).$$

Свойства процесса $ARMA(p,q)$ с $\mathbb{E}(X_t) = \mu$.

1. Процесс стационарен, если все корни уравнения $a(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$.
   Но процесс X_t – типа $ARMA(p,q)$, $a(L)X_t = b(L)\varepsilon_t$, то есть $(\mathbb{E}X_t = 0)$, может быть стационарным и в случае, когда уравнение $a(z) = 0$ имеет корень $z : |z| = 1$.
   Пример. Пусть $X_t = \varepsilon_t$. Этот процесс стационарный.
   $$X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \Rightarrow (1-L)X_t = (1-L)\varepsilon_t$$
   то есть, $a(L)X_t = b(L)\varepsilon_t$, где $a(L) = 1 - L$ и $b(L) = 1 - L$. Иными словами, для процесса X_t получили $ARMA(1,1)$ представление
   $$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \tag{1}$$
   для которого уравнение $a(z) = 0$ имеет корень $|z| = 1$.

   В общем случае, если у $ARMA(p,q)$ процесса X_t, $a(L)X_t = b(L)\varepsilon_t$, многочлены $a(z)$ и $b(z)$ *не имеют общих корней*, условие нахождения всех корней уравнения $a(z) = 0$ вне единичного круга $|z| \leq 1$ является *необходимым и достаточным* для стационарности процесса X_t.

2. Если процесс стационарен, то существует эквивалентный ему процесс $MA(\infty)$
   $$X_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}, \quad c_0 = 1, \ \sum_{j-0}^{\infty} |c_j| < \infty \tag{2}$$
   или
   $$X_t - \mu = c(L)\varepsilon_t, \quad \textit{где} \quad c(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j = \frac{b(z)}{a(z)} \tag{3}$$

3. Если все корни уравнения $b(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$ **(условие обратимости)**, то существует эквивалентное представление процесса X_t в виде процесса авторегрессии бесконечного порядка $AR(\infty)$
   $$X_t - \mu = \sum_{j=1}^{\infty} d_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t, \tag{4}$$

или

$$d(L)(X_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad где \quad d(z) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} d_j z^j = \frac{a(z)}{b(z)} \tag{5}$$

Стационарный процесс $ARMA(p, q)$ всегда можно аппроксимировать процессом скользящего среднего достаточно высокого порядка, а при выполнении условия обратимости его можно также аппроксимировать процессом авторегрессии достаточно высокого порядка.

Специфику формы коррелограммы процесса $ARMA(p, q)$ в общем случае указать труднее, чем для моделей $AR(p)$ и $MA(q)$. Отметим только, что для значений $k > q$ коррелограмма процесса $a(L)X_t = b(L)\varepsilon_t$ выглядит так же, как и коррелограмма процесса авторегрессии $a(L)X_t = \varepsilon_t$.

Если $ARMA(p_1, q_1)$ ряд X_t и $ARMA(p_2, q_2)$ ряд Y_t статистически независимы между собой, и $Z_t = X_t + Y_t$, то типичным является положение, когда Z_t является $ARMA(p, q)$ рядом, у которого:

$$p = p_1 + p_2, \tag{6}$$

$$q = p_1 + q_2, \quad p_1 + q_2 > p_2 + q_1 \tag{7}$$

$$q = p_2 + q_1, \quad p_2 + q_1 > p_1 + q_2 \tag{8}$$

Возможны также ситуации, когда значения p и q оказываются меньше указанных значений. (Такие ситуации возникают в случаях, когда многочлены $a_X(z)$ и $a_Y(z)$, соответствующие авторегрессионным частям процессов X_t и Y_t , имеют общие корни.)

В частном случае, когда оба ряда имеют тип $AR(1)$, но с различными параметрами, их сумма имеет тип $ARMA(2, 1)$.

$$X_t \sim AR(1), Y_t \sim AR(1) \Rightarrow z_t = X_t + Y_t \sim ARMA(1, 1) \tag{9}$$

Из указанного выше факта вытекает, что если каждая из компонент отвечает простой модели AR, то при независимости этих компонент их сумма будет $ARMA$ процессом. Такого же рода процесс мы получим, если часть компонент имеет тип AR, а остальные компоненты имеют тип MA. Единственным исключением является случай, когда все компоненты являются MA процессами – в этом случае в результате получаем MA процесс.

Предположим, наконец, что "истинный" экономический ряд отвечает $AR(p)$ модели, но значения этого ряда измеряются со случайными ошибками, образующими процесс белого шума (т.е. $MA(0)$). Тогда наблюдаемый ряд имеет тип $ARMA(p, p)$.

$$X_t \sim AR(p), Y_t \sim AR(0) \Rightarrow z_t = X_t + Y_t \sim ARMA(p, p) \tag{10}$$

Замечание

$$\sum AR \to ARMA \tag{11}$$

$$\sum AR + \sum MA \to ARMA \tag{12}$$

$$\sum MA \to MA \tag{13}$$

Ранее мы уже говорили о том, что если $ARMA(p, q)$ процесс X_t удовлетворяет условию обратимости, то его можно представить в виде стационарного процесса $AR(\infty)$. Последний, в свою очередь, можно аппроксимировать стационарным процессом $AR(p)$, быть может, достаточно высокого порядка.

Таким образом, в практических задачах можно было бы и вовсе обойтись без использования моделей $ARMA$, ограничиваясь либо AR либо MA моделями. При этом, однако, количество коэффициентов, подлежащих оцениванию, может оказаться слишком большим (что снижает точность оценивания) и даже превосходить количество имеющихся наблюдений. В этом смысле модели $ARMA$ могут быть "**более экономными**".